4ο online μάθημα
Εισαγωγή στην Στατιστική
3/4/2020

Άσκηση 11η: Αν $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ να βρεθούν:

(i) η κατανομή $X_i - \bar{X}$ για i σταθερό

(ii) η κατανομή $n(\bar{x} - \mu)^2 / \sigma^2$

(iii) η μέση τιμή του $S'^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

(iv) η κατανομή $\sum \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$

Λύση: (i) $X_i - \bar{X}$ θα πρέπει να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών

$$X_i - \bar{X} = X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow X_i - \bar{X} = X_i - \left(\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

ή

$$X_i - \bar{X} = (0 \dots 0 \; \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-οστή} \\ \text{θέση}}}{1} \; 0 \dots 0)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$X_i - \bar{X} = \left(-\frac{1}{n} \cdots -\frac{1}{n} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-οστή} \\ \text{θέση}}}{1 - \frac{1}{n}} \quad -\frac{1}{n} \cdots -\frac{1}{n}\right)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

δηλαδή $X_i - \bar{X} = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j$ με $a_j = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & j \neq i \\ 1 - \frac{1}{n}, & j = i \end{cases}$

Επομένως $X_i - \bar{X}$ ως γραμμικός συνδυασμός των X_j, $j = 1, \dots, n$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$-\frac{1}{n}(n-1)\cdot \mu + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mu = 0$$

$E\left(\sum a_j X_j\right) = \sum a_j E(X_j) = \mu \sum a_j$

$Var\left(\sum a_j X_j\right) = \sum_j Var(a_j X_j) = \sum a_j^2 \sigma^2$

και διακύμανση $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{n^2}(n-1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2 (n-1)}{n}$

(ii) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \Rightarrow \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \Rightarrow$

$$\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n} \sim X_1^2$$

(iii) Είναι γνωστό ότι (υπάρχουν κι άλλοι τρόποι/αυτός είναι ο πιο εύκολος)

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2 \quad \text{ή} \quad \frac{\cancel{(n-1)}\frac{1}{\cancel{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$$

Άρα

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$$

$E(X_n^2)=n$

$Var(X_n^2)=2n$

Και $$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\right] = (n-1)$$

Άρα $$E\left[\sum(X_i-\bar{X})^2\right] = (n-1)\sigma^2$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(iv) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_1^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim X_n^2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Άσκηση 12η: Αν X_1, X_2 τ.δ. από μια τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ να βρεθούν οι κατανομές των στατιστικών συναρτήσεων

(i) $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$

(ii) $\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_2-X_1)^2}$

(iii) $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_2-X_1)^2}}$ και X_2^2 / X_1^2

Λύση: (i) $X_1 \sim N(0,1)$ και $X_2 \sim N(0,1)$

Τότε $X_2 - X_1$ ως γραμμικός συνδυασμός ακολουθεί $N(0,2)$ (γιατί?)

$(X_2 - X_1) = \sum_{i=1}^{2} a_i X_i$

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$

$E(X_2 - X_1) = E(X_2) - E(X_1) = 0.$

$Var(X_2 - X_1) = Var(X_2) + Var(X_1) = 2$

επειδή X_2, X_1 ανεξάρτητες.

Άρα $\dfrac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ και αποδείχθηκε.

(ii) Όμοια με το (i) ερώτημα $(X_i \sim N(0,1))$

$X_1 + X_2 \sim N(0,2)$ ως γραμμικός συνδυασμός κανονικών είναι κανονική

$\Rightarrow \dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow \dfrac{(X_1+X_2)^2}{2} \sim X_1^2$

Οπότε και $\dfrac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim X_1^2$

Επομένως θα έλεγε κάποιος

$$\dfrac{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2} \Big/ 1}{\dfrac{(X_2-X_1)^2}{2} \Big/ 1} \sim F_{1,1}$$

(εάν σταματούσα την άσκηση εδώ, δεν θα έπαιρνα όλα τα μόρια της άσκησης.)

(15)

Όμως αυτό ισχύει υπό μια ΒΑΣΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ. Ποια;

X_1+X_2, X_2-X_1 ανεξάρτητες τ.μ. και τότε θα ισχύει.

Πώς θα το δείχνω αυτό;

Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος που μας "λείπουν" διάφορες γνώσεις και αποτελέσματα θα δούμε έναν τρόπο.

Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το διάνυσμα:

$$\begin{pmatrix} X_1+X_2 \\ X_2-X_1 \end{pmatrix}_{2\times 1} = A_{2\times 2}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

Εδώ είναι $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Τότε στον επόμενο πίνακα θα υπολογίσω τον πίνακα

$$A\begin{pmatrix} \mathrm{Var}\,X_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}\,X_2 \end{pmatrix}A^t$$

Εδώ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

→ αν τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου είναι 0 τότε ανεξάρτητα

(iii) $\left.\begin{array}{l} X_1+X_2 \sim N(0,2) \\ X_2-X_1 \sim N(0,1) \end{array}\right\}$ ανεξαρτησία υπάρχει από (ii) $\qquad \left(\dfrac{X_2-X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2_1$

$$\frac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{(X_2-X_1)^2}{2}\Big/1}} \sim t_1$$

Επίσης $\dfrac{X_2^2/1}{X_1^2/1} \sim F_{1,1}$.

Άσκηση 13η: Αν X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες τ.μ. $N(0,1)$ να υπολογιστεί συναρτήσει της α.σ.κ. γνωστής κατανομής

(i) $P(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 < 1)$

(ii) η κατανομή της $2X_1^2 / (X_2^2 + X_3^2)$

Λύση: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \sim \chi_3^2$

Άρα

(i) $P(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 1) = F_{\chi_3^2}(1)$

(ii) $\left.\begin{array}{l} X_1^2 \sim \chi_1^2 \\ X_2^2 + X_3^2 \sim \chi_2^2 \end{array}\right\}$ ανεξάρτητες

$$\frac{X_1^2 / 1}{(X_2^2 + X_3^2)/2} \sim F_{1,2}$$

Άσκηση 14η: Έστω X_i, $i = 1, \dots, 5$ ανεξάρτητες $N(0,1)$

(i) Να βρεθεί η μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$X_1^2 + \dots + X_5^2$$

(ii) Να βρεθεί η c έτσι ώστε → συμμετρικό διάστημα

$$P\left(-c \leq 2X_5 / \sqrt{X_1^2 + \dots + X_4^2} \leq c\right) = 0.9$$

Λύση: (i) $X_1^2 + \dots + X_5^2 \sim \chi_5^2$

$E(\chi_n^2) = n$, $Var(\chi_n^2) = 2n$

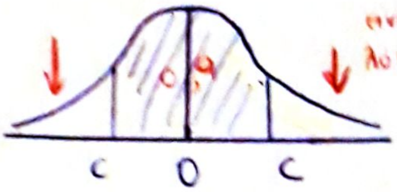
Άρα $E(X_1^2 + \dots + X_5^2) = 5$, $\sigma = \sqrt{2 \cdot 5}$

(ii) $X_1^2 + \dots + X_4^2 \sim \chi_4^2$

$X_5 \sim N(0,1)$

Άρα $\dfrac{X_5}{\sqrt{(X_1^2 + \dots + X_4^2)/4}} \sim t_4$ ή $\dfrac{2X_5}{\sqrt{(X_1^2 + \dots + X_4^2)}} \sim t_4$.

$$P(-c < t_4 < c) = 0.90$$



είναι ίδια
λόγω συμμετρίας

$2x = 0.1$

$x = 0.05$

Άρα

$$P(t_4 \geq c) = 0.05$$

$$c = t_{0.05,4} = 2.132$$

Άσκηση 15η: Έστω S^2 η διακύμανση τ.δ. $n=10$ από $N(\mu=0, \sigma^2=4)$

Βρείτε την $Var(S^2)$. Δειγματοληψία από κανονικό πληθυσμό.

Λύση: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1} \Rightarrow 9\frac{S^2}{4} \sim X^2_9 \xrightarrow{Var(X^2_n) = 2n}$$

$$Var\left(9\frac{S^2}{4}\right) = 2 \cdot 9 \Rightarrow \frac{9^2}{4^2} Var\, S^2 = 2 \cdot 9 \Rightarrow Var\, S^2 = \frac{32}{9}$$

Άσκηση 16η: Να βρεθεί η κατανομή της $\sum X_i^2/\sigma^2$ όταν

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ. $N(0, \sigma^2)$

Λύση: $$X_i \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim X^2_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim X^2_n.$$

①

Ασκηση 2 σελ. 311 (απο το βιβλίο)

Ασκηση 17η: Δίνεται τ.δ. X_1, X_2, X_3, X_4 από πληθυσμό $N(0,1)$.

Αν $Y_1 = \dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{(X_1-X_2)^2}}$, $Y_2 = \dfrac{2X_3^2}{X_1^2+X_2^2}$ και $Y_3 = X_4 - \bar{X}$

(i) Να βρεθούν οι σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε $P(Y_1 \leq c_1) = 0.95$, $P(Y_2 \geq c_2) = 0.95$

(ii) Να υπολογιστεί η $P(Y_3 \geq \sqrt{3})$

Λύση: X_1, X_2, X_3, X_4 τ.δ. $N(0,1)$

Αρα $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$

X_1+X_2 ως γρ. συνδυασμός ανεξάρτητων μεταβλητών απο κανονικό πληθυσμό ακολουθεί κανονική κατανομή

Επίσης $X_1 - X_2 \sim N(0,2)$

$E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0$

Σκέφτομαι ότι $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ $Var(X_1+X_2) = Var X_1 + Var X_2$

Και $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \dfrac{(X_1-X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2$

Επομένως: $\dfrac{\overbrace{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}}^{N(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2}}_{\chi_1^2} \Big/ 1}} \sim t_1$

είναι αυτό σωστό;
Για να το πω αυτό θα πρέπει να εξασφαλίσω ότι X_1+X_2, X_1-X_2 ανεξάρτητες

Ισχύει; Αν ναι υπό ποια προϋπόθεση. (όπως στην άσκηση 12 ερώτημα (ii))

Πρέπει ν.δ.ο. X_1+X_2, X_1-X_2 ανεξάρτητες. Είναι

$$\begin{pmatrix} X_1+X_2 \\ X_1-X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Τότε: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Αρα είναι ανεξάρτητες, οπότε όντως

$$Y_1 \sim t_1$$

(i) $X_3 \sim N(0,1) \Rightarrow X_3^2 \sim \chi_1^2$

Ακόμη $X_1^2 + X_2^2 \sim \chi_2^2$ διότι $X_1, X_2 \sim N(0,1)$

Επομένως χ_1^2

$$\frac{X_3^2/1}{(X_1^2+X_2^2)/2} = \frac{2X_3^2}{X_1^2+X_2^2} \sim F_{1,2}$$

χ_2^2

(ii) $Y_3 = X_4 - \bar{X} \Rightarrow Y_3 = X_4 - \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i\right) \Rightarrow$

$Y_3 = X_4 - \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \Rightarrow Y_3 = -\frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2 - \frac{1}{4}X_3 + \frac{3}{4}X_4$

Επομένως η Y_3 ως γραμμικός συνδυασμός X_i ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή γιατί $X_i \sim N(0,1)$

$\mu = -\frac{1}{4}\cancel{\mu_1} - \frac{1}{4}\cancel{\mu_2} - \frac{1}{4}\cancel{\mu_3} + \frac{3}{4}\cancel{\mu_4} \xRightarrow{\text{εδώ}} \mu = 0$

$\sigma^2 = \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{9}{16}\cdot 1 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Άρα $Y_3 \sim N(0, 3/4)$ ή $Z = \frac{Y_3}{\sqrt{3/4}} \sim N(0,1)$

Είναι :

$$P(Y_3 \geq \sqrt{3}) = P\left(\frac{Y_3}{\sqrt{3/4}} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3/4}}\right) = P(Z \geq 2) = 0{,}5 - 0.477$$

$(0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 2))$

άσκηση 3 σελίδα 311-312

Άσκηση 18η: Έστω $X_1, \ldots, X_6$ τυχαίο δείγμα από $N(0,1)$ και

$Z_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $Z_2 = \frac{X_3 + \ldots + X_6}{4}$, $Z_3 = \frac{\sqrt{2}(X_1 - X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2 + (X_5-X_6)^2}}$,

$Z_4 = [(X_1 - X_6)^2 + (X_2 - X_5)^2 + (X_3 - X_4)^2]/2$

a) να βρεθούν οι κατανομές των τ.μ.:

(i) $\frac{Z_1 + Z_2}{2}$

(ii) $2Z_1^2 + 4Z_2^2$

(iii) $X_3 - Z_2$

(iv) Z_3

(v) Z_4

β) Να βρεθούν οι σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε

(i) $P(Z_3 \geq -c_1) = 0.99$

(ii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0.99$

Λύση: $Z_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ είναι γραμμικός συνδυασμός κανονικών άρα ακολουθεί κανονική με μέση τιμή $\mu = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ και

$\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Άρα $Z \sim N(0, 1/2)$

Επίσης $Z_2 = \frac{X_3 + \ldots + X_6}{4}$ με το ίδιο σκεπτικό (ή ως μέσος τεσσάρων το πλήθος κανονικών)

$$Z_2 \sim N(0, 1/4)$$

Επομένως $\frac{Z_1 + Z_2}{2}$ (άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ. αφού στο $Z_1 \to X_1, X_2$, $Z_2 \to X_3, \ldots, X_6$)

ως γραμμικός συνδυασμός κανονικών ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

και διακύμανση

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

Άρα $\frac{Z_1 + Z_2}{2} \sim N(0, 3/16)$

(ii) $Z_1 \sim N(0, 1/2) \Rightarrow \frac{Z_1}{\sqrt{1/2}} \sim N(0,1) \Rightarrow 2 Z_1^2 \sim \chi_1^2$

$Z_2 \sim N(0, 1/4) \Rightarrow \frac{Z_2}{\sqrt{1/4}} \sim N(0,1) \Rightarrow 4 Z_2^2 \sim \chi_1^2$

Άρα $\underbrace{2Z_1^2}_{\chi_1^2} + \underbrace{4Z_2^2}_{\chi_1^2} \sim \chi_2^2$ (Z_1, Z_2 ανεξάρτητες)

(iii) $X_3 - Z_2 = X_3 - \frac{1}{4}(X_3 + X_4 + X_5 + X_6)$ Ερώτηση προς συζήτηση

$$X_3 - Z_2 = \frac{3}{4} X_3 - \frac{1}{4} X_4 - \frac{1}{4} X_5 - \frac{1}{4} X_6$$

Είναι επομένως γραμμικός συνδυασμός κανονικών → άρα κανονική

Μέση τιμή : $\frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{1}{4}\, 0 - \frac{1}{4}\, 0 = 0$

Και διακύμανση : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 1$

Επομένως $X_3 - Z_2 \sim N(0, 12/16 = 3/4)$

(iv) $X_1 - X_2 \sim N(0,2)$ (γιατί;) $X_1 \sim N(0,1)$ γραμμικός συνδυασμός κανονι
$X_2 \sim N(0,1)$ ανεξάρτητες

$$\Rightarrow \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow (X_1 - X_2)\frac{1}{\sqrt{2}} \sim N(0,$$

Παρόμοια: $\frac{X_3 - X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_3 - X_4)^2}{2} \sim \chi^2_1$

$\frac{(X_5 - X_6)^2}{2} \sim \chi^2_1$ ανεξάρτητες

και άρα $\frac{(X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2}{2} \sim \chi^2_2$

Επομένως :

$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\underbrace{\frac{(X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2}{2}}_{\chi^2_2} \Big/ \underbrace{2}_{\text{β.ε. } \chi^2_2}}} \sim t_2$$

$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \rightarrow N(0,1)$

ή $Z_3 = \frac{\sqrt{2}\,(X_1 - X_2)}{\sqrt{(X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2}} \sim t_2$

Ισχύουν όλες οι υποθέσεις; Ναι

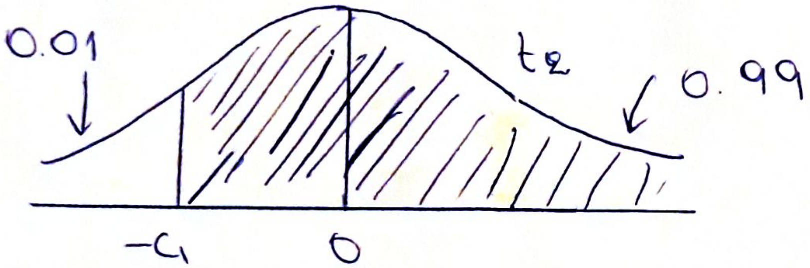
$(X_1 - X_2)$, $(X_3 - X_4)$, $(X_5 - X_6)$ ανεξάρτητες

(v) $X_1 - X_6 \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{X_1 - X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \dfrac{(X_1 - X_6)^2}{2} \sim \chi^2_1$

Όμοια $\dfrac{(X_2 - X_5)^2}{2} \sim \chi^2_1$ και $\dfrac{(X_3 - X_4)^2}{2} \sim \chi^2_1$

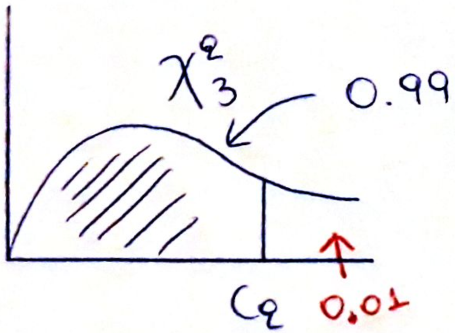
Επομένως $Z_4 \sim \chi^2_3$ (εξήγηση ;)

6) $Z_3 \sim t_2$, $P(Z_3 \geq -c_1) = 0.99$



Επομένως $c_1 = t_{0.01,2} = 6.965$ (σελ. 325 ή ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ)

$Z_4 \sim \chi^2_3$, $P(Z_4 \leq c_2) = 0.99 \Rightarrow$



$P(Z_4 \geq c_2) = 0.01$

$\Rightarrow c_2 = \chi^2_{0.01,3} = 11.345$ (σελ. 324 ή ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ)